

Dérivée à gauche et à droite

Def Soit f une fonction définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$

$$- f'(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

↑ dérivée à gauche

$$- f'(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

↑ dérivée à droite

Thm

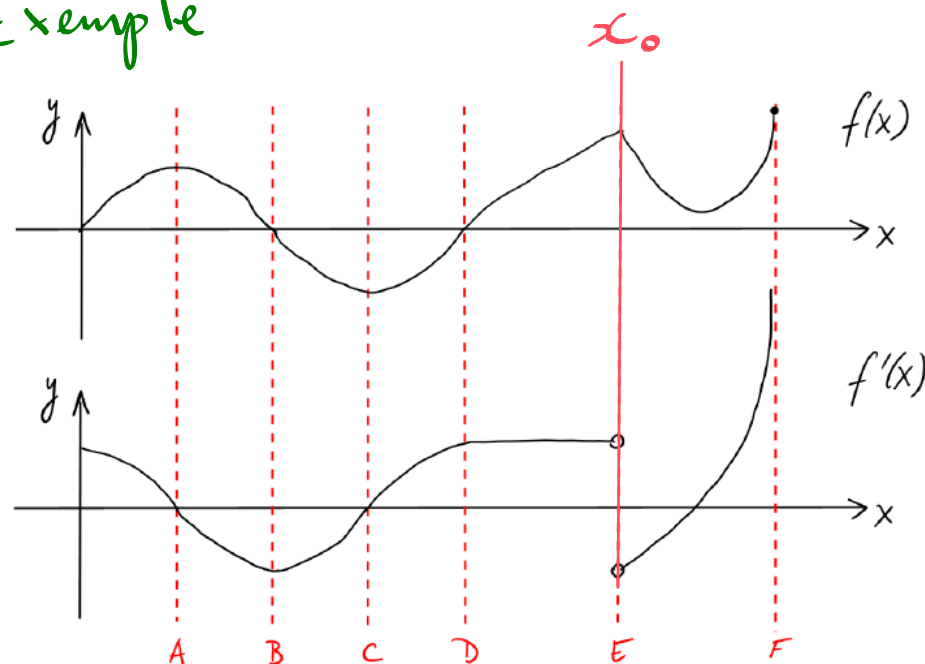
f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^-)$ et $f'(x_0^+)$ existent et

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

Rem On peut aussi écrire

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemple



Au point E, on a
 $f'(x_0^-) > 0$ et $f'(x_0^+) < 0$

Donc

$f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en x_0

Autres remarques :

- Au point F, $f(x)$ est définie, mais à une pente infinie, donc n'est pas dérivable

Règles de dérivation

Thm Soient f et g dérivables sur I

On a

$$① (f+g)' = f' + g'$$

$$② (\lambda f)' = \lambda f' \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$③ (f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$④ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$⑤ (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

↑
la dérivée d'une composition

↑
dérivée interne

Preuve

① On a

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\&= f'(x_0) + g'(x_0) = (f' + g')(x_0)\end{aligned}$$

③ On a

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ils s'annulent!} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{f(x)}_{f(x_0)} \underbrace{g(x - g(x_0))}_{x - x_0} + \underbrace{g(x_0)}_{g(x_0)} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)}$$

$$= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

$$= (fg' + f'g)(x_0) \quad \square$$

Dérivée de fonctions élémentaire

• Soit $f(x) = c$, une fonction constante

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \underline{0}$$

$$\underline{f'(x) = 0}$$

• Soit $f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \underline{1}$$

$$\underline{f'(x) = 1}$$

• Soit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \geq 1$

On montre par récurrence que

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Initialisation: $(n=1)$

Si $n=1$; $f(x) = x^1 = x$

$$f'(x) = 1 = 1x^{1-1} \quad \checkmark$$

Hérédité: (vrai pour $n \Rightarrow$ vrai pour $n+1$)

Supposons que $(x^n)' = nx^{n-1}$

On doit montrer que

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n \quad \swarrow \text{Hyp de Rec}$$

Or, on a

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)'$$

③

$$= (x^n)'x + x^n \cdot (x)'$$

Hyp de récurrence

$$\begin{aligned} &= n x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 \\ &= n x^n + x^n = (n+1) x^n \quad \checkmark \quad \square \end{aligned}$$

Remarque On peut aussi montrer que

$$(x^m)' = m x^{m-1} \quad \left[(x^{-4})' = -4 x^{-5} \right]$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}^{<0}$ par récurrence en utilisant la règle (4).

En fait, on a le résultat suivant

Prop $(x^\lambda)' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Exemples

• $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

• $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

• $f(x) = \sqrt{\sin(x) + 3}$

La fonction f est une fonction composée avec

- $\sqrt{x}$ comme fonction externe
- $\sin(x) + 3$ comme fonction interne

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

↑ externe ↑ interne ↑ dérivée interne

Ponc, pour trouver la dérivée de f :

① on dérive la fonction externe

② on compose le résultat avec la fct interne

③ on multiplie par la dérivée interne

①: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

②: $\frac{1}{2\sqrt{\sin(x)+3}} \cdot (\sin(x)+3)'$

$= \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)+3}}$

Remarque la règle pour dérivée une composition ⑤ nous retrouve la règle pour dérivée un quotient:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \stackrel{⑤}{=} f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$

Or, $\frac{1}{g}$ est une composition avec

- $\frac{1}{x}$ comme fonction externe

- g comme fonction interne

Rappel: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

On a alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{1}{g^2} \cdot g'\right)$$

$$= \frac{f'}{g} - \frac{f g'}{g^2}$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

↑ dérivée interne